ΚΟΛΛΕΓΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Ελληνο-Αμερικανικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Γυμνάσιο Κολλεγίου Αθηνών

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Φύλλο 4ο Ιούνιος 2021

Το πρόβλημα του Μόντυ Χολ

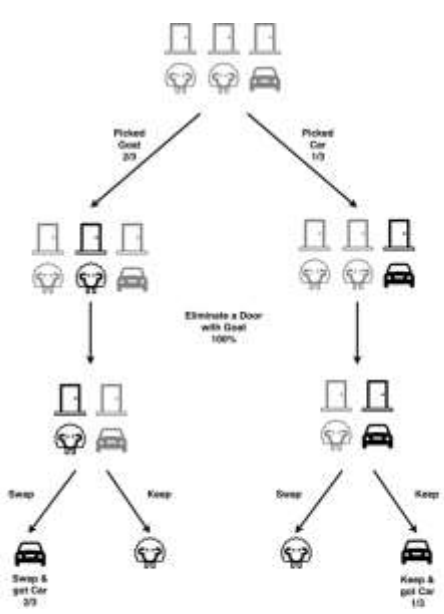
Το πρόβλημα του Μόντυ Χολ είναι ένα πρόβλημα το οποίο αφορά στον κλάδο των πιθανοτήτων αλλά και τη λήψη αποφάσεων. Είναι εμπνευσμένο από το αμερικάνικο τηλεπαιχνίδι *Let's Make A Deal* και ονομασμένο από τον παρουσιαστή του παιχνιδιού.

Το παιχνίδι έχει ως εξής: μπροστά από τον παίκτη, παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές αριθμημένες πόρτες. Η κάθε μία από αυτές περιέχει μέσα ένα αντικείμενο. Μία από αυτές, περιέχει το πολυπόθητο έπαθλο, ένα αυτοκίνητο. Οι άλλες δύο περιέχουν βραβεία αποτυχίας. Ο σκοπός του παίκτη, είναι ανάμεσα από τις τρεις πόρτες που του παρουσιάζονται, να επιλέξει εν τέλει την πόρτα που περιέχει το αυτοκίνητο.

Αρχικά ο παίκτης επιλέγει τυχαία μία πόρτα. Ας υποθέσουμε ότι αυτή είναι η πόρτα με τον αριθμό 1. Ο παρουσιαστής, ο οποίος γνωρίζει το περιεχόμενο της κάθε πόρτας, ανοίγει μία από τις δύο πόρτες οι οποίες απομένουν. Συγκεκριμένα, ανοίγει πάντα αυτήν που δεν περιέχει το πολυπόθητο αυτοκίνητο. Ας υποθέσουμε ότι αυτή είναι η πόρτα 2. Ύστερα ο παρουσιαστής θα ρωτήσει τον παίκτη: «Προτιμάς να αλλάξεις και να επιλέξεις την πόρτα 3 ή να παραμείνεις στην αρχική σου επιλογή;»

Εδώ είναι που τα μαθηματικά έχουν ενεργό ρόλο. Το ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Είναι προς το συμφέρον του παίκτη να αλλάξει πόρτα η όχι; Από εδώ και στο εξής ως f(1) θα συμβολίζουμε την επιλογή της πόρτας 1 και γενικά ως f(ν) την επιλογή της πόρτας ν. Επίσης θα συμβολίσουμε με w το ενδεχόμενο της σωστής επιλογής και με l της λανθασμένης. Για κάθε επιλογή f(ν) έπεται και μία δεύτερη επιλογή f(ν,κ). Για παράδειγμα αν ο παίκτης παραμείνει στην αρχική του επιλογή, την πόρτα 1, θα γράφουμε f(1,1). Ακόμα γνωρίζουμε ότι w(f(n)) + l(f(n))=1 καθώς εν τέλει οι πιθανότητες σωστής επιλογής και οι πιθανότητες ήττας έχουν άθροισμα 1 και ότι w(f(1))+w(f(2))+w(f(3))=1 δηλαδή οι πιθανότητες επιτυχίας των τριών αρχικών επιλογών έχουν άθροισμα 1. Το ίδιο ισχύει και για τις πιθανότητες λανθασμένης επιλογής.

Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Όταν ο παίκτης επιλέγει αρχικά μία πόρτα, ας υποθέσουμε την 1, έχει πιθανότητα 1/3 να πετύχει το αυτοκίνητο, δηλαδή w(f(1))=1/3. Αυτό όμως σημαίνει πως η πιθανότητα να μην κερδίσει το αυτοκίνητο είναι 2/3. Όπως προαναφέραμε ο παρουσιαστής θα ανοίξει την πόρτα η οποία δεν περιέχει το έπαθλο μέσα. Εάν αυτή η πόρτα είναι η 2η, τότε αυτομάτως καταλαβαίνουμε ότι w(f(2))=0 και ότι l(f(2))=1. Σε αυτό το σημείο ο παρουσιαστής ρωτάει εάν ο παίκτης θέλει να αλλάξει πόρτα, και από την 1η να πάει στην 3η. Πλέον υπάρχουν δύο επιλογές. Επιλογή πρώτη είναι να παραμείνει στην επιλογή f(1,1) από την οποία καταλαβαίνουμε ότι w(f(1))=w(f(1,1) ή να αλλάξει με την πόρτα 3 f(1,3). Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να πούμε ότι στην περίπτωση που δεν αλλάξει την αρχική του επιλογή η πιθανότητα να κερδίσει δεν μεταβάλλεται, ενώ η επιλογή του να αλλάξει την πόρτα 1 με την πόρτα 3 f(1,3) ισούται με την επιλογή του να είχε παραμείνει στην πόρτα 3 εάν είχε επιλέξει αυτήν αρχικά. Επομένως w(f(3))=w(f(3,3)). Από το παραπάνω επίσης λαμβάνουμε ότι w(f(3,3))=w(f(1,3))=w(f(3)). Μπορούμε να συμπεράνουμε εάν τελικά συμφέρει να αλλάξει πόρτα ή όχι. Από τα παραπάνω προκύπτει:
$w(f(1))+w(f(2))+w(f(3)) = 1$ ή $\cancel{w(f(1))}+w(f(2))+w(f(3)) = \cancel{w(f(1))} + l(f(1))$.



Άρα w(f(2))+w(f(3)) = l(f(1)). Ήδη γνωρίζουμε ότι w(f(1)) = 1/3 και ότι w(f(2))=0. Επομένως w(f(3)) = l(f(1)).
l(f(1))=1-w(f(1))=2/3=w(f(3))
Επομένως w(f(3)) > w(f(1)), άρα συμφέρει τον παίκτη να αλλάξει πόρτα.

Το πρόβλημα του Μόντυ Χολ «προκαλεί πονοκέφαλο» σε πολλούς μαθητές και δασκάλους. Έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ως ένα παράδοξο στην επιστήμη των πιθανοτήτων. Ο τρόπος με τον οποίο αλλάζουν οι πιθανότητες βασίζεται στον συνδυασμό των πιθανοτήτων σωστής επιλογής του πρώτου σταδίου και του ανοίγματος της πόρτας που δεν περιέχει το έπαθλο γεγονός που μπερδεύει όσους προσπαθούν να απαντήσουν χωρίς την απαραίτητη σκέψη.

Παπαναστασίου Α.

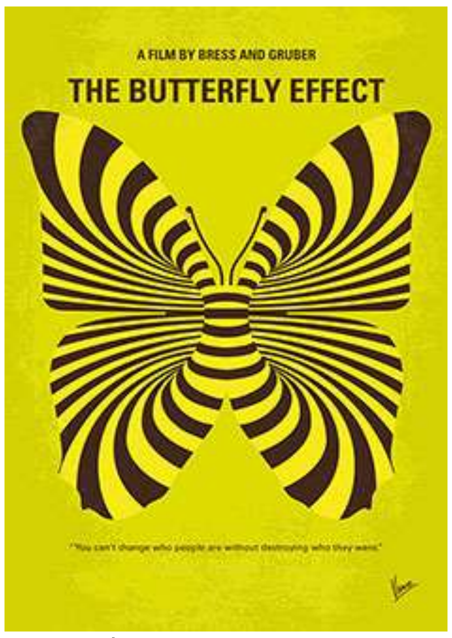
Θεωρία του Χάους: Το φαινόμενο της πεταλούδας

Η θεωρία του χάους είναι η μελέτη της τυχαίας ή απρόβλεπτης συμπεριφοράς σε συστήματα που ρυθμίζονται από ντετερμινιστικούς νόμους (όλα εξαρτώνται από κάτι άλλο) . Ο ακριβής όρος, ντετερμινιστικό χάος, υποδηλώνει κάτι παράδοξο γιατί συνδέει δύο έννοιες που συνήθως είναι ασυμβίβαστες. Εκεί εντάσσεται και η θεωρία του χάους, που καθιστά αδύνατη για παράδειγμα την πρόβλεψη των καιρικών συνθηκών.

> ***"Αν μία πεταλούδα κινήσει τα φτερά της στον Αμαζόνιο, μπορεί να φέρει βροχή στην Κίνα"***

Το φαινόμενο της πεταλούδας ή αλλιώς το φαινόμενο της ευαίσθητης εξάρτησης ενός συστήματος από τις αρχικές συνθήκες σύμφωνα με τη θεωρία του χάους έχει σχολιαστεί και έχει ερευνηθεί αρκετές φορές. Το φαινόμενο αυτό αποτυπώνει το γεγονός πως η παραμικρή μεταβολή των αρχικών συνθηκών επηρεάζει εξαιρετικά την εξέλιξη του συστήματος. Οι παράγοντες – παράμετροι αυτού που έχουν ιδιαίτερη σημασία, είναι στενά αλληλοεξαρτόμενοι όσο ασήμαντοι και αν φαίνονται. Η μεταβολή τους μπορεί να επιφέρει απρόβλεπτες επιπτώσεις. Ο Edward Lorenz, μαθηματικός που ασχολήθηκε και αναγνώρισε το φαινόμενο αυτό, προσπαθώντας να δημιουργήσει ένα μοντέλο πρόγνωσης καιρού παρατήρησε ότι πολύ μικρές διαφοροποιήσεις στις αρχικές τιμές του, προκαλούσαν μεγάλες διαφορές στα τελικά αποτελέσματα. Έτσι, σε δημοσίευσή του το 1963 στο περιοδικό *Journal of the Atmospheric Sciences*, υποστήριξε πως είναι αδύνατο να γνωρίζουμε με τόση ακρίβεια τις αρχικές συνθήκες, έτσι ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε το τελικό αποτέλεσμα. Σκοπός της ερευνητικής περιοχής του Χάους, είναι γενικώς η προσπάθεια εξήγησης της πορείας μετάβασης από την Τάξη στο Χάος και αντιστρόφως. Το γεγονός αυτό είχε αντιληφθεί έναν αιώνα νωρίτερα, ο Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος Henri Poincare (1854-1912): «Μία ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα» .

Το φαινόμενο της πεταλούδας δε γνωρίζει περιορισμούς και έχει επηρεάσει ακόμα και τον κινηματογράφο. Δεν είναι λίγοι οι σεναριογράφοι που το έχουν αξιοποιήσει και έχουν βασίσει πάνω σε αυτό το έργο τους, αποτυπώνοντας την έννοια του άπειρου και του ασταθούς. Ένα από αυτά τα έργα είναι η ταινία "The butterfly effect" που



κυκλοφόρησε το 2004 , σε σκηνοθεσία του Eric Bress και του Jonathan Gruber, οι οποίοι ήταν και οι σεναριογράφοι του έργου. Υπόθεση: Ο Evan πάσχει από απώλεια μνήμης, κάτι που οφείλεται στην τραυματική παιδική του ηλικία. Μέσω του ημερολογίου του ανακαλύπτει στοιχεία του εαυτού του και ταξιδεύει στον χρόνο έτσι ώστε να διορθώσει το παρελθόν, ελπίζοντας για ένα καλύτερο παρόν. Η ταινία μας κάνει να αναρωτηθούμε πως θα αντιδρούσαμε εμείς και τι θα κάναμε αν μπορούσαμε να γυρίσουμε πίσω στον χρόνο και να αλλάξουμε κάτι. Ποιον παράγοντα θεωρούμε εμείς πιο σημαντικό και ποιος τελικά έπαιξε κυρίαρχο ρόλο;

Γκατζώνη Ε., Μπρατάκος Α., Πανόπουλος Γ., Τσαπάρας Κ.

ΤΡΟΦΗ ΓΙΑ ΣΚΕΨΗ

Ποιο ψηφίο εμφανίζεται πιο συχνά στους αριθμούς μεταξύ του 1 και του 1000;

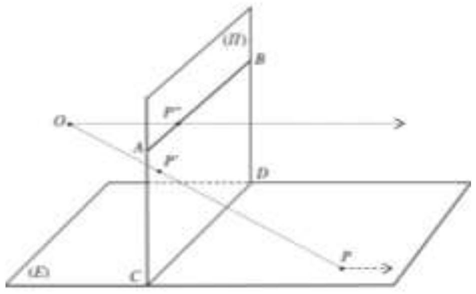
Μη ευκλείδειες γεωμετρίες (Μέρος 2ο)

Η γεωμετρία με την οποία έχουμε εξοικειωθεί και την οποία συναντούμε στην καθημερινότητα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο φύλλο του περιοδικού (3ο), υπάρχουν διαφορετικές γεωμετρίες από την Ευκλείδεια, οι λεγόμενες μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, στις οποίες δεν ισχύει το 5ο Ευκλείδειο αίτημα (αίτημα παραλληλίας). Σε αυτές ανήκει και η Προβολική Γεωμετρία, η οποία σε αντίθεση με την Ευκλείδεια, προέκυψε από μια περισσότερο αισθητική και λιγότερο πρακτική ανάγκη.

Η Προβολική Γεωμετρία έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν και συνεχίζει να χρησιμοποιείται εκτεταμένα στην τέχνη της ζωγραφικής. Πρόκειται για την προσπάθεια να αποτυπωθεί ένα τρισδιάστατο αντικείμενο στο επίπεδο των δύο διαστάσεων, ώστε να δημιουργηθεί η αίσθηση του βάθους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα Προβολικής Γεωμετρίας συναντάμε στο σχέδιο με την τεχνική της προοπτικής. Όταν σχεδιάζουμε δύο παράλληλες ευθείες με προοπτική, τις απεικονίζουμε με ένα ιδιαίτερο τρόπο. Φαίνεται δηλαδή πως οι δύο παράλληλες σταδιακά συγκλίνουν και τελικά συναντώνται σε κάποιο σημείο στο “άπειρο”. Η προσθήκη, στο Ευκλείδειο επίπεδο, αυτού του «εις το άπειρο» σημείου και των αντίστοιχων ευθειών που συγκλίνουν σε αυτό το σημείο δεν επιτρέπουν την ύπαρξη παράλληλων ευθειών και για αυτόν τον λόγο δεν ορίζεται η έννοια της παραλληλίας. Οι κανόνες της προοπτικής συστηματοποιήθηκαν κυρίως στην περίοδο της Αναγέννησής από τους Sandro Botticelli, Leonardo Da Vinci κ.α, οι οποίοι είχαν βαθιές γνώσεις μαθηματικών και μηχανικής. Η τεχνική της προοπτικής είχε μαθηματικό υπόβαθρο και για αυτόν τον λόγο αποτέλεσε βάση για τη μεταγενέστερη ανάπτυξη της Προβολικής Γεωμετρίας ως έναν αυτοτελή κλάδο των Μαθηματικών.

Η ιστορία της ξεκινά τον 17ο αιώνα, όταν ένας ζωγράφος και μηχανικός από την Λυών, ο Ζιράρ Ντεζάργκ, ανέπτυξε ορισμένες ιδέες για μια επέκταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, την Προβολική. Έναν αιώνα αργότερα αποφασιστική για την εξέλιξη της Προβολικής Γεωμετρίας ήταν η συμβολή των Gaspar Monge, Jean-Victor Poncelet, Charles Brianchon, August Ferdinand Mobius, Jacob Steiner.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα προβολικής γεωμετρίας συναντάμε στην αποτύπωση εικόνων στον ζωγραφικό πίνακα. Ειδικότερα, υποθέτουμε πως έχουμε ένα διαφανή (γυάλινο) πίνακα (Π), ο οποίος είναι κάθετος προς ένα οριζόντιο επίπεδο (Ε), επάνω στο οποίο στέκεται ένας ζωγράφος (σημείο Ο). Η εικόνα ενός σημείου P του επιπέδου (Ε) αποτυπώνεται στον πίνακα στο σημείο P′, το οποίο τέμνει τη (νοητή) ακτίνα που ενώνει το μάτι του ζωγράφου (Ο) με το σημείο P. Όσο απομακρύνεται το σημείο P από τον πίνακα (Π) τόσο το σημείο P′ μετατοπίζεται από τη θέση του και πλησιάζει την



ευθεία AB, η οποία αποτυπώνει τον ορίζοντα στον πίνακα. Αυτή είναι η βασική αρχή της προοπτικής στο σχέδιο. Στην Προβολική Γεωμετρία όλες οι “παράλληλες” μεταξύ τους ευθείες τέμνονται και όλα αυτά τα σημεία τομής σχηματίζουν την λεγόμενη “εις το άπειρο” ευθεία.

Η Προβολική Γεωμετρία δεν έχει μόνο διαφορές με την Ευκλείδεια. Στο Προβολικό Επίπεδο ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα που ισχύουν και στο Ευκλείδειο:

1. Για οποιαδήποτε δύο σημεία υπάρχει μοναδική ευθεία που τα περιέχει.
2. Για οποιεσδήποτε δύο ευθείες υπάρχει σημείο το οποίο ανήκει και στις δύο.
3. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία διαφορετικά μεταξύ τους που είναι ανά τρία μη συγγραμικά.

Παυλόπουλος Α.

Η μουσική κλίμακα από τους Πυθαγορείους ως σήμερα

Ο Πυθαγόρας είναι ευρύτατα γνωστός για τη σχέση του με τα Μαθηματικά και τη ίδρυση της ομώνυμης σχολής.. Η σπουδή των Μαθηματικών οδήγησε στη μελέτη της μουσικής, με τη χρήση ενός οργάνου ονόματι «μονόχορδο» (ή χορδοτόνιο), το οποίο αποτελούνταν από μία μόνο χορδή, τεντωμένη επάνω σε έναν βαθμονομημένο κανόνα (χάρακα) και έναν κινητό δρομέα (ή υπαγωγέα στα αρχαία ελληνικά).

Με το όργανο αυτό παρατηρήθηκε ότι ταλαντώνοντας το πλήρες μήκος της χορδής και το μισό αυτής, παράγονται νότες σύμφωνου διαστήματος, που θεωρήθηκε ότι πρόκειται για την ίδια νότα, με διαφορά μιας οκτάβας, π.χ. C4-C5. Λόγω του ότι υποδιπλασιάζοντας το μήκος της χορδής, η συχνότητα της νότας διπλασιάζεται, προκύπτει ότι η συχνότητα μιας παλλόμενης χορδής είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της. Έτσι, εάν f_{C4} η συχνότητα της νότας C4, τότε η συχνότητα της νότας C5 είναι $f_{C5} = 2f_{C4}$, δηλαδή διάστημα ογδόης. Σημειώνεται ότι η διαίρεση μεταξύ δύο αριθμών, αυτό δηλαδή που σήμερα ονομάζεται «λόγος» στην αριθμητική και στην γεωμετρία, στη μαθηματική θεωρία της Μουσικής του Πυθαγόρα ονομάζεται «διάστημα». Το δεύτερο αρμονικό διάστημα που παρατηρήθηκε με το συγκεκριμένο όργανο είναι το διάστημα της 5ης καθαρής, το οποίο προέκυψε από τον αρμονικό μέσο των αριθμών ½ και 1, που είναι το 3/2. Αυτό σημαίνει ότι μειώνοντας τη χορδή στα 2/3 του αρχικού μήκους της, αυξάνουμε τη συχνότητα κατά τα 3/2 της αρχικής, παράγοντας τη νότα G.

Ορισμός Αρμονικού Μέσου: Εάν τρεις θετικοί αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου τότε ισχύει ότι $\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}$. Ο αριθμός β ονομάζεται αρμονικός μέσος των α και γ.

Το τρίτο αρμονικό διάστημα που παρατηρήθηκε είναι το διάστημα της 4ης καθαρής, το οποίο προέκυψε από τον αριθμητικό μέσο των αριθμών ½ και 1, που είναι το ¾. Αυτό σημαίνει ότι μειώνοντας τη χορδή στα 3/4 του αρχικού μήκους της, αυξάνουμε τη συχνότητα κατά τα 4/3 της αρχικής, παράγοντας τη νότα F.

Ορισμός Αριθμητικού Μέσου: Εάν τρεις θετικοί αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ισχύει ότι $2\beta = \alpha + \gamma$. Ο αριθμός β ονομάζεται αριθμητικός μέσος των α και γ.

Από αυτό το σημείο και μετά, για να

λύρα, ως βελτίωση της αρχαιότερης επτάχορδης η οποία δεν επαρκούσε για την κάλυψη μίας οκτάβας, με την ακόλουθη αντιστοιχία νοτών ανά χορδή και με την διαφορά ότι ενώ στην αρχαιότητα κατέβαιναν την κλίμακα των νοτών (ως προς τη συχνότητα), σήμερα την

Ονομασία Σημερινής Νότας	Ονομασία Χορδής Οκτάχορδης Λύρας
E	Νήτη
D	Παρανήτη
C	Τρίτη
B	Παραμέση
A	Μέση
G	Λιχανός
F	Παρυπάτη
E'	Υπάτη

ανεβαίνουμε. Συγκεκριμένα ισχύει:

Οι νότες στο σύγχρονο πιάνο και η απεικόνιση των συχνοτήτων τους.

Επιχειρώντας να απεικονίσουμε σε γραφική παράσταση τις συχνότητες των νοτών του σύγχρονου πιάνου σε συνάρτηση με το διάστημα που δημιουργείται μεταξύ δύο διαδοχικών νοτών (δηλαδή τόνος ή ημιτόνιο = 1/2 τόνος), κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα με τις συχνότητες των νοτών ανά οκτάβα όταν το κούρδισμα του πιάνου είναι με A=440 Hz.

Πίνακας 1. Οι συχνότητες των νοτών του σύγχρονου πιάνου με κούρδισμα A=440 Hz σε ημιτόνια

Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)
C0	0,00	16,35	C1	6,00	32,70	C2	12,00	65,41	C3	[illegible]	[illegible]	C4	24,00	261,63
C#0 / Db0	0,50	17,32	C#1 / Db1	6,50	34,65	C#2 / Db2	12,50	69,30	C#3 / Db3	[illegible]	[illegible]	C#4 / Db4	24,50	277,18
D0	1,00	18,35	D1	7,00	36,71	D2	13,00	73,42	D3	[illegible]	[illegible]	D4	25,00	293,66
D#0 / Eb0	1,50	19,45	D#1 / Eb1	7,50	38,89	D#2 / Eb2	13,50	77,78	D#3 / Eb3	[illegible]	[illegible]	D#4 / Eb4	25,50	311,13
E0	2,00	20,60	E1	8,00	41,20	E2	14,00	82,41	E3	[illegible]	[illegible]	E4	26,00	329,63
F0	2,50	21,83	F1	8,50	43,65	F2	14,50	87,31	F3	[illegible]	[illegible]	F4	26,50	349,23
F#0 / Gb0	3,00	23,12	F#1 / Gb1	9,00	46,25	F#2 / Gb2	15,00	92,50	F#3 / Gb3	21,00	[illegible]	F#4 / Gb4	27,00	369,99
G0	3,50	24,50	G1	9,50	49,00	G2	15,50	98,00	G3	[illegible]	[illegible]	G4	27,50	392,00
G#0 / Ab0	4,00	25,96	G#1 / Ab1	10,00	51,91	G#2 / Ab2	16,00	103,83	G#3 / Ab3	[illegible]	[illegible]	G#4 / Ab4	28,00	415,30
A0	4,50	27,50	A1	10,50	55,00	A2	16,50	110,00	A3	[illegible]	[illegible]	A4	28,50	440,00
A#0 / Bb0	5,00	29,14	A#1 / Bb1	11,00	58,27	A#2 / Bb2	17,00	116,54	A#3 / Bb3	[illegible]	[illegible]	A#4 / Bb4	29,00	466,16
B0	5,50	30,87	B1	11,50	61,74	B2	17,50	123,47	B3	[illegible]	[illegible]	B4	29,50	493,88

Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)	Νότα	Τόνοι	Συχνότητα (Hz)
C5	30,00	523,25	C6	36,00	1.046,50	C7	42,00	2.093,00	C8	48,00	4.186,01
C#5 / Db5	30,50	554,37	C#6 / Db6	36,50	1.108,73	C#7 / Db7	42,50	2.217,46	C#8 / Db8	48,50	4.434,92
D5	31,00	587,33	D6	37,00	1.174,66	D7	43,00	2.349,32	D8	49,00	4.698,63
D#5 / Eb5	31,50	622,25	D#6 / Eb6	37,50	1.244,51	D#7 / Eb7	43,50	2.489,02	D#8 / Eb8	49,50	4.978,03
E5	32,00	659,25	E6	38,00	1.318,51	E7	44,00	2.637,02	E8	50,00	5.274,04
F5	32,50	698,46	F6	38,50	1.396,91	F7	44,50	2.793,83	F8	50,50	5.587,65
F#5 / Gb5	33,00	739,99	F#6 / Gb6	39,00	1.479,98	F#7 / Gb7	45,00	2.959,96	F#8 / Gb8	51,00	5.919,91
G5	33,50	783,99	G6	39,50	1.567,98	G7	45,50	3.135,96	G8	51,50	6.271,93
G#5 / Ab5	34,00	830,61	G#6 / Ab6	40,00	1.661,22	G#7 / Ab7	46,00	3.322,44	G#8 / Ab8	52,00	6.644,88
A5	34,50	880,00	A6	40,50	1.760,00	A7	46,50	3.520,00	A8	52,50	7.040,00
A#5 / Bb5	35,00	932,33	A#6 / Bb6	41,00	1.864,66	A#7 / Bb7	47,00	3.729,31	A#8 / Bb8	53,00	7.458,62
B5	35,50	987,77	B6	41,50	1.975,53	B7	47,50	3.951,07	B8	53,50	7.902,13

υπολογίσουμε το λόγο συχνοτήτων κάθε άλλης νότας εντός της ίδιας οκτάβας, αρκεί να ανεβαίνουμε κάθε φορά μία 5η καθαρή από την νότα που μόλις υπολογίσαμε δηλαδή να πολλαπλασιάσουμε την συχνότητά της με το 3/2. Στην περίπτωση που η νέα νότα ξεπερνά την τρέχουσα οκτάβα, απλώς διαιρούμε με το 2 τη συχνότητά της. Π.χ. για να προσδιορίσουμε τον λόγο συχνοτήτων της νότας D,

$$f_{D5} = \frac{3}{2} f_{G4} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} f_{C4}\right) = \frac{9}{4} f_{C4}$$

$$\textit{Επίσης} \quad f_{D4} = \frac{1}{2} f_{D5} \quad \textit{άρα} \quad f_{D4} = \frac{1}{2}\frac{9}{4} f_{C4} = \frac{9}{8} f_{C4}$$

πολλαπλασιάζουμε τη συχνότητα της νότας G με το 3/2 δηλαδή:

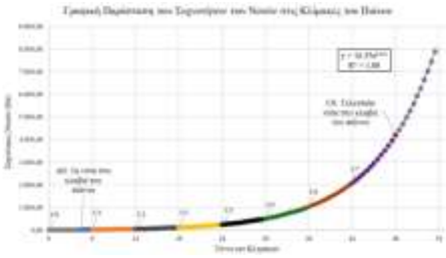
Προκύπτει, έτσι, ότι δύο διαδοχικές νότες που απέχουν έναν τόνο, έχουν λόγο συχνοτήτων 9/8.

Με βάση αυτούς τους λόγους κατασκευάστηκε η οκτάχορδη

Στην επόμενη εικόνα εμφανίζεται το σύγχρονο κλαβιέ του πιάνου όπου επισημαίνονται οι διαδοχικές οκτάβες με χρώματα που αντιστοιχούν σε αυτά του γραφήματος.

Φθάνουμε έτσι στο επόμενο

γράφημα όπου παρατηρούμε ότι οι συχνότητες των νοτών στο κλαβιέ του πιάνου δεν αποτελούν γραμμική αλλά εκθετική συνάρτηση με βάση το e (e≈2,72).



Καμούδη Μ.